A construction of twisted modules of code VOAs (Representation theory of vertex operator algebras and related topics)

AUTHOR(S):

宮本, 雅彦; 佐久間, 伸也

CITATION:

宮本, 雅彦 ...[et al]. A construction of twisted modules of code VOAs (Representation theory of vertex operator algebras and related topics). 数理解析研究所講究録 2001, 1218: 83-92

ISSUE DATE:

2001-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/41246

数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 83-92

A construction of twisted modules of code VOAs

宮本 雅彦 (Masahiko Miyamoto)
筑波大学数学系
Institute of Mathematics, University of Tsukuba,

佐久間伸也 (Shinya Sakuma)
筑波大学数学研究科
Doctoral Program in Mathematics, University of Tsukuba

1 序文

今回の話では、ある code D から構成される code VOA M_D と D の自己同型から誘導される M_D の自己同型に対するツイスト加群を構成する。

VOA の出発点は、26 個の散在型有限単純群のうち位数最大である Monster 単純群 $\mathbb{M}$ と modular 関数に関する Moonshine 予想である。即ち、ある無限次元の次数付き Monster 加群 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ があって、各 $g\in\mathbb{M}$ と種数 0 の $SL(2,\mathbb{R})$ のある離散部分群 Γ_g に対して、Thompson 級数

$$T(g,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}Tr(g|_{V_n})q^{n-1}$$

が Γ_g-不変、即ち $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_g$ に対して $T(g,\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=T(g,\tau)$ であり、$g=1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}(dim\,V_n)q^{n-1}=j(\tau)-744=q^{-1}+196884q+\cdots,q=e^{2\pi i\tau}$$

が成り立つことが McKay と Thompson により初めに予想された。ここで、$j(\tau)$ は古典的楕円 modular 関数である。この予想を解決するために、Frenkel、Lepowsky、Meurman により Moonshine 加群 $V^{\natural}=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n^{\natural}$ が構成され、これと Borcherds の考えた頂点代数の概念 ([B]) を合わせて、Moonshine 頂点作用素代数 (VOA)$V^{\natural}$ が構成された。([FLM]) さらに、$V^{\natural}$ の全自己同型群は Monster 単純群になることが知られている。

$(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ を rank c の VOA、g,h を $g^T = h^T = 1, T \in \mathbb{Z}$, である可換な V の自己同型とする。h-不変な既約 g-ツイスト V-加群 $W = \oplus_{n=0}^{\infty} W_{\lambda+\frac{n}{T}}, \lambda \in \mathbb{C}$, に対して、$h$ は W のある線形変換 $\phi(h)$ を与える。この時、

$$\begin{aligned} T_W(h,\tau) &= Tr_W \phi(h) q^{L(0)-\frac{c}{24}} \\ &= q^{\lambda-\frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} Tr(\phi(h)|_{W_{\lambda+\frac{n}{T}}}) q^{\frac{n}{T}} \end{aligned}$$

とする。$V = V^\natural(= W)$、$g = 1$ のとき、これは上の Thompson 級数になる。

VOA と modular 不変性に関して、Zhu はある有限性の条件 C_2 を満たす有理型 VOA が modular 不変性をもつことを示した。([Z]) さらに、Dong、Li、Mason がこれを拡張して、次のようなことが示された。([DLM])

定理 1. *[DLM]* $C(g,h,\tau) = \langle T_W(h,\tau) | W : h$-不変な既約 g-ツイスト V-加群$\rangle$ とする。この時、$(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ が条件 C_2 を満たす有理型 *VOA* のとき、$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して、

$$C\left(g, h, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = C(g^a h^b, g^c h^d, \tau)$$

が成り立つ。特に、$g = 1$、$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の場合、

$$C\left(1, h, -\frac{1}{\tau}\right) = C(h, 1, \tau)$$

となる。

一方、Moonshine VOA $V^\natural$ が、holomorphic、即ち既約加群が自分自身だけである事より、次のことも示された。

定理 2. *[DLM]* 各 $h \in Aut(V^\natural)$ に対して、既約 h-ツイスト $V^\natural$-加群も唯一つ存在する。*(これを $V^\natural(h)$ であらわすことにする。)*

$V^\natural$ は条件 C_2 を満たすので、以上の事より、各 $h \in \mathbb{M} = Aut(V^\natural)$ に対して、

$$T\left(h, -\frac{1}{\tau}\right) = \alpha T_{V^\natural(h)}(1,\tau)\ ,\ \alpha \in \mathbb{C}$$

と書ける。この事から、変換 $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ が h-ツイスト加群を通して見ることができる。ところが、上の結果ではツイスト加群の存在は示されているが、構成の方は実際位数 2 の (2 つの) 共役類に対してしかされていない。他の元に対するツイスト加群を構成するというのが、今回の話の出発点であり、最終的な目標である。

ツイスト加群を構成するために、今回は$V^\natural$が Framed VOA であることに注目する。VOA V が互いに直交する中心電荷$\frac{1}{2}$の共形元$e^1,\cdots,e^n$でその和がVのVirasoro元に一致するものをもつとき、VはFramed VOAと呼ばれる。([DGH]) この時、VはIsing 模型$L(\frac{1}{2},0)$のn個のテンソル積$L(\frac{1}{2},0)^{\otimes n}$を部分VOAとして含む。Dong、Mason、Zhu は、$V^\natural$がそのような48個の共形元をもつことを示した。([DMZ]) $L(\frac{1}{2},0)$は3つの既約加群$L(\frac{1}{2},k), k = 0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$, をもち、Framed VOA V を$L(\frac{1}{2},0)^{\otimes n}$の加群と見れば、$V$は、$L(\frac{1}{2},0)^{\otimes n}$の既約加群$L(k_1,\cdots,k_n) = L(\frac{1}{2},k_1)\otimes\cdots\otimes L(\frac{1}{2},k_n), k_i = 0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$, の直和

$$V = \bigoplus_{k_i=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}} a_{k_1,\cdots,k_n} L(k_1,\cdots,k_n)$$

に分解する。ここで、$a_{k_1,\cdots,k_n}$は重複度を表す。一般に Framed VOA は複雑であり、その加群を分類するのは困難である。そこで$L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$がない部分、即ち

$$V^0 = \bigoplus_{k_i=0,\frac{1}{2}} a_{k_1,\cdots,k_n} L(k_1,\cdots,k_n)$$

を考える。この時、V^0はVの部分VOAであり、Vが単純VOAであれば、$a_{k_1,\cdots,k_n} = 0$ *or* 1であり、$D = \{(2k_1,\cdots,2k_n)|a_{k_1,\cdots,k_n} = 1\} \subset \mathbb{Z}_2^n$は (binary) code となる。さらに、$V^0$は code VOA M_Dと呼ばれる VOA になる。([M1, M2]) Framed VOA V の(ツイスト)加群は code VOA $V^0 = M_D$ の(ツイスト)加群として見ることができるので、code VOA の(ツイスト)加群を調べる必要がある。対称群S_nの元gが座標の置換による作用でDを不変にする時、gは$\tilde{g}(e^i) = e^{g(i)}$である$M_D$の自己同型$\tilde{g}$を誘導する。([M1]) 記号を簡単にするためこれもgで表す。

VをVOAとする。Vのk個のテンソル積(VOA)$V^{\otimes k}$とその自己同型$g = (1\,2\,\cdots\,k)$を考える。Barron,Dong, Mason は、V-加群(W,Y_W)が与えられたとき、空間W上にY_Wから$V^{\otimes k}$のあるg-ツイスト加群の構造(W,Y_g)を構成した。([BDM]) 今回の結果は、これをSVOA V の場合に拡張し、code VOA $M_D \subset (L(\frac{1}{2},0)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))^{\otimes k}$に応用したものである。また、framed VOA (特に Moonshine VOA)の場合にも、置換から誘導される自己同型gに対するg-ツイスト加群を構成するのが、これからの課題である。

2 code VOA

この節では、(binary) code VOA を構成する。初めにSVOAを定義する。

定義 1. $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-次数付きベクトル空間$V = \oplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_n = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$と線形写像

$$\begin{aligned} Y(\cdot,z) : V &\to (\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in \mathrm{End}V). \end{aligned}$$

と V の元 $\mathbf{1}$、ω について、次が成り立つ時、$(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ は頂点作用素超代数 *(SVOA)* であるという。ただし、$V_{\bar{s}}=\oplus_{n\in\frac{s}{2}+\mathbf{Z}}V_n$ であり、$u\in V_{\bar{s}}$ のとき $s=\bar{u}$ とする。:

(V1) $dim\,V_n<\infty$ かつ、十分小さい n に対して $V_n=0$ となる。

(V2) 任意の $u,v\in V$ に対し、十分大きな n で $u_nv=0$ となる。

(V3) $Y(\mathbf{1}.z)=Id_V$

(V4) 任意の $v\in V$ に対して、$Y(v,z)\mathbf{1}\in(\mathrm{End}V)[[z]]$ かつ $\lim_{z\to 0}Y(v.z)\mathbf{1}=v$

(V5) $m,n\in\mathbf{Z}$ に対して、

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c$$

となる。ここで、$Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}L(n)z^{-n-2}$、$c=rank\,V\in\mathbf{C}$ である。

(V6) 任意の $v\in V$ に対して、$Y(L(-1)v,z)=\frac{d}{dz}Y(v.z)$

(V7) $L(0)|_{V_n}=nId_{V_n}$

(V8) $\mathbf{Z}_2$*-homogeneous* な $u,v\in V$ に対して、次の *Jacobi* 律が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y(u,z_1)Y(v,z_2)\\
&\qquad-(-1)^{\bar{u}\bar{v}}z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y(v,z_2)Y(u.z_1)\\
&\qquad\qquad=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y(Y(u.z_0)v,z_2)
\end{aligned}\tag{1}$$

$V_{\bar{1}}=0$ のときには $V=V_{\bar{0}}$ は *VOA* である。

SVOA V は超局所可換性を満たす。: $\mathbf{Z}_2$-homogeneous な $u.v\in V$ に対して、ある正整数 N があって、

$$(z-w)^NY(u,z)Y(v.w)=(-1)^{\bar{u}\bar{v}}(z-w)^NY(v.w)Y(u.z)$$

が成り立つ。

次に (binary) code VOA を構成する。k は正整数とする。$(V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}.Y.\mathbf{1}.\omega)$ を SVOA とする。V の k 個のテンソル積 $F=V^{\otimes k}$ を考え、$\otimes_{i=1}^kv_i\in F$ $(v_i\in V)$ に対して、頂点作用素 $Y(\otimes_{i=1}^kv_i.z)=\otimes_{i=1}^kY(v_i.z)$ を定義し、F 全体に線形に拡張する。codeword $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\in\mathbf{Z}_2^k$ に対して、$V_\alpha=V_{\overline{\alpha_1}}\otimes\cdots\otimes V_{\overline{\alpha_k}}$ とすれば、$F=\oplus_{\alpha\in\mathbf{Z}_2^k}V_\alpha$ である。V の超局所可換性から、$u\in V_\alpha.v\in V_\beta$ に対して、

$$(z-x)^NY(u.z)Y(v.x)=(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}(z-x)^NY(v.x)Y(u.z)\tag{2}$$

$D \subset \mathbb{Z}_2^k$ を(線形)code とする。上の $(-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ を消すために、D の内積による $\langle\pm 1\rangle$ での中心拡大した群 $\hat{D} = \{\pm e^\alpha | \alpha \in D\}$ を考える。ここでは、$\nu_j = (0^{j-1}10^{k-j}), j = 1, \ldots, k$ に対し e^{ν_j} を $e^{\nu_j}e^{\nu_j} = 1, e^{\nu_i}e^{\nu_j} = -e^{\nu_j}e^{\nu_i} (i \neq j)$ となる形式的な元とし、$\alpha = \nu_{j_1} + \cdots + \nu_{j_p}, j_1 < \cdots < j_p$ に対して $e^\alpha = e^{\nu_{j_1}}e^{\nu_{j_2}} \cdots e^{\nu_{j_p}}$ と定義する。このとき、$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^k$ に対して

$$e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle + |\alpha||\beta|} e^\beta e^\alpha$$

が成り立つ。([M2]) このとき、fock 空間を

$$V_D = \oplus_{\alpha\in D}(V_\alpha \otimes e^\alpha)$$

と定義し、頂点作用素を $v \in V_\alpha$ に対して

$$Y(v \otimes e^\alpha, z) = Y(v,z) \otimes e^\alpha$$

と定義すると、超局所可換が成り立つことが分かる。真空は $\hat{\mathbf{1}} = (\otimes_{i=1}^k \mathbf{1}) \otimes e^0 \in V_{(0^k)}$ であり、

$$e^i = (\otimes_{j=1}^{i-1} \mathbf{1}) \otimes \omega \otimes (\otimes_{j=i+1}^k \mathbf{1}) \otimes e^0$$

とおくと、e^i は共形元であり、$\hat{\omega} = e^1 + \cdots + e^k$ は V_D の Virasoro 元になる。即ち、次が成り立つ。

定理 3. *[M2] (1) D が偶 code のとき、$(V_D, Y, \hat{\mathbf{1}}, \hat{\omega})$ は VOA である。*
(2) $(V_{\mathbb{Z}_2^k}, Y, \hat{\mathbf{1}}, \hat{\omega})$ は SVOA である。

3 ツイスト加群の構成

この節では、[BDM] の結果を拡張して、code VOA のツイスト加群を構成する。初めにツイスト加群の定義を与える。

定義 2. $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ は SVOA とし、g は位数 k の V の自己同型とする。ベクトル空間 W と線形写像

$$\begin{aligned} Y^W(\cdot, z) : V &\rightarrow (\mathrm{End}W)[[z^{\frac{1}{k}}, z^{-\frac{1}{k}}]] \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{n\in\frac{1}{k}\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in \mathrm{End}W) \end{aligned}$$

が次を満たす時、(W, Y^W) は g-ツイスト V-加群であるという。

(W1) $W = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} W_\lambda$ となる。ただし、$W_\lambda = \{w \in W | L^W(0)w = \lambda w\}$、$Y^W(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L^W(n) z^{-n-2}$, である。

(W2) 任意の$\lambda \in \mathbb{C}$に対して、$W_\lambda < \infty$かつ十分小さい$n \in \frac{1}{2k}\mathbb{Z}$に対し$W_{\lambda+n} = 0$となる。

(W3) 任意の$u \in V$と$w \in W$に対して、十分大きなnで$u_n w = 0$となる。

(W4) $Y^W(\mathbf{1}, z) = Id_W$

(W5) $u \in V^r = \{v \in V | gv = e^{-\frac{2\pi ir}{k}} v\}$のとき、$Y^W(u, z) = \sum_{n \in \frac{r}{k}+\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1}$となる。

(W6) $\mathbb{Z}_2$-*homogeneous*な$u \in V^r$と$v \in V$に対して、次のツイスト*Jacobi*律が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) & Y^W(u, z_1)Y^W(v, z_2) \\
& - (-1)^{\bar{u}\bar{v}} z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y^W(v, z_2)Y^W(u, z_1) \\
& = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)^{-\frac{r}{k}} Y^W(Y(u, z_0)v, z_2). \quad (3)
\end{aligned}
$$

Y^Wについても超局所可換性が成り立つ。: $\mathbb{Z}_2$-homogeneousな$u, v \in V$に対して、ある正整数Nがあって、

$$
(z - x)^N Y^W(u, z)Y^W(v, x) = (-1)^{\bar{u}\bar{v}}(z - x)^N Y^W(v, x)Y^W(u, z)
$$

が成り立つ。

$(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$はSVOAとし、$k$は正整数とする。$\sigma = e^{2\pi i L(0)}$とすると、$\sigma$は、$V_{\bar{0}}$上で1、$V_{\bar{1}}$上で$-1$として作用し、$V$の位数2の自己同型になる。$(W, Y^W)$を$\sigma^l$-ツイスト$V$-加群(l=0.1)とし、$g = (1\,2 \cdots k)$とする。$W$上に$\sigma_1^{l+k-1}\tilde{g}$-ツイスト$V_{\mathbb{Z}_2^k}$-加群構造$(W, Y_g)$を定義していく。ここで、$\sigma_1$はテンソル積の第1成分だけ$\sigma$が作用する自己同型$(\sigma, 1, \cdots, 1)$であり、$\tilde{g}$は座標の置換により$g$から誘導される$V_{\mathbb{Z}_2^k}$の自己同型、即ち、$\alpha \in \mathbb{Z}_2^k$, $u_i \in V_{\overline{\alpha_i}}$に対して

$$
\tilde{g}((\otimes_{i=1}^k u_i) \otimes e^\alpha) = (\otimes_{i=1}^k u_{g^{-1}(i)}) \otimes g_1(e^\alpha)
$$

とする。ただし、$\alpha = \nu_{i_1} + \cdots + \nu_{i_p}$, $i_1 < \cdots < i_p$に対して$g_1(e^\alpha) = e^{\nu_{g(i_1)}} \cdots e^{\nu_{g(i_p)}}$とする。$u \in V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$に対して$V_{\mathbb{Z}_2^k}$の元

$$
(\otimes_{i=1}^{j-1}\mathbf{1}) \otimes u \otimes (\otimes_{j+1}^k \mathbf{1}) \otimes e^{\delta_{\bar{u},\bar{1}}\nu_j}
$$

を$u^j, j = 1, \cdots, k$, とおく。ここで、$\nu_j = (0^{j-1}10^{k-j})$である。このとき、$\{u^j | u \in V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}, j = 1, \cdots, k\}$は$V_{\mathbb{Z}_2^k}$を生成する。まず生成元に対して$Y_g$を定義する。

定義 3. $\Delta_k(z) \in (End\, V)[[z^{\frac{1}{2k}}, z^{-\frac{1}{2k}}]]$ を

$$\Delta_k(z) = \exp\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j z^{-\frac{j}{k}} L(j)\right) k^{-L(0)} z^{\left(\frac{1}{k}-1\right)L(0)}$$

とする。ただし、$a_j, j \in \mathbb{Z}_+$, は

$$\exp\left(-\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} a_j x^{j+1}\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot x = \frac{1}{k}(1+x)^k - \frac{1}{k}$$

で定義され、$k^{-L(0)}$ や $z^{\left(\frac{1}{k}-1\right)L(0)}$ は $u \in V_{\frac{1}{2}n}$ に対して

$$k^{-L(0)}u = k^{-\frac{1}{2}n}u \ , \ z^{\left(\frac{1}{k}-1\right)L(0)}u = z^{\frac{(1-k)n}{2k}}u$$

で定義し線形に拡張する。*(c.f. [BDM])* この $\Delta_k(z)$ を使って、$u \in V$ に対して $\overline{Y}^W(u,z)$ を

$$\overline{Y}^W(u,z) = Y^W(\Delta_k(z)u, z^{\frac{1}{k}})$$

と定義し、u^j に対して Y_g を

$$Y_g(u^j, z) = \overline{Y}(u, \varepsilon_k^{-j+1}z) = \lim_{z^{\frac{1}{2k}} \to \varepsilon_{2k}^{-j+1} z^{\frac{1}{2k}}} \overline{Y}(u,z)$$

のように定義する。ただし、$\varepsilon_{2k} = e^{-\frac{\pi i}{k}}$ とする。

例えば、Virasoro 元 $\hat{\omega}$ について、$Y_g(\hat{\omega}, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{L}_g(n) z^{-n-2}$ とすると

$$\hat{L}_g(n) = \frac{L(kn)}{k}\ (n \neq 0)\ ,\ \hat{L}_g(0) = \frac{L(0)}{k} - \frac{(k^2-1)c}{24k}$$

となっていることがわかる。この Y_g について次が成り立つことがわかる。

補題 1. $u \in V, j = 1, \cdots, k$ に対して、

$$\left[\hat{L}_g(-1), Y_g(u^j, z)\right] = \frac{d}{dz} Y_g(u^j, z) = Y_g((L(-1)u)^j, z)$$

が成り立つ。

補題 2. $\mathbb{Z}_2$*-homogeneous* な $u, v \in V$ と $i, j = 1, \cdots, k$ に対して、$Y_g(u^i, z_1)$ と $Y_g(v^j, z_2)$ は局所可換、即ち、ある正整数 N があって

$$(z_1 - z_2)^N Y_g(u^i, z_1) Y_g(v^j, z_2) = (-1)^{\bar{u}\bar{v}} (z_1 - z_2)^N Y_g(v^j, z_2) Y_g(u^i, z_1) \qquad (4)$$

が成り立つ。

注意 1. V-加群 (W^i, Y^i) に対して $\otimes_{i=1}^k W^i$ 上の頂点作用素 $Y = \otimes_{i=1}^k Y^i$ は *(2)* のような関係を満たすので、ツイストでない加群の場合には *2* 節で定義したような *cocycle* を考える必要があるが、上の補題から、この *(g-ツイストの)* 場合には *cocycle* が無視できることがわかる。

これは $\langle Y_g(u^i, z_1) | u \in V_0 \cup V_1, i = 1, \cdots, k \rangle$ はどの 2 元も局所可換な $\mathbb{Z}_2$-次数付き空間になることを示している。$(End\, W)[[z^{\frac{1}{2k}}, z^{-\frac{1}{2k}}]]$ においてこのような局所可換な $\mathbb{Z}_2$-次数付き空間のうち極大な空間を ($\mathbb{Z}_{2k}$-twisted) local system という。[L] $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ を上の空間を含む local system とする。$a(z) \in A$ に対して、$\rho a(z) = \lim_{z^{\frac{1}{2k}} \to \varepsilon_{2k}^{-j} z^{\frac{1}{2k}}} a(z)$ とすれば、ρ は $\rho^{2k} = 1$ である A の自己同型になる。A 上に頂点作用素 Y_A を次のように定義する。

定義 4. $\rho a(z) = e^{-\frac{\pi i r}{k}} a(z)$ である $\mathbb{Z}_2$*-homogeneous* な $a(z), b(z) \in A$ に対して、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (a(z)_n b(z))\, z_0^{-n-1} = \mathrm{Res}_{z_1} \left(\frac{z_1 - z_0}{z} \right)^{\frac{r}{2k}} \cdot X \tag{5}$$

により n-正規積 $a(z)_n b(z), n \in \mathbb{Z}$. を定義する。ここで、

$$X = z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z}{z_0} \right) a(z_1) b(z) - (-1)^{st} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z - z_1}{-z_0} \right) b(z) a(z_1).$$

である。上の *(5)* を $Y_A(a(z), z_0) b(z)$ とおく。

このとき、次が成り立つ。

定理 4. *[L]* $(A, Y_A, I(z_0) = Id_W, D = \frac{d}{dz_0})$ は頂点超代数になり、$Y_W(a(z), z_0) = a(z_0)$ とすれば、(W, Y_W) は ρ-ツイスト A-加群になる。

一方、SVOA の加群と local system に関して次のようなことが成り立つ。

定理 5. *[L]* V は *SVOA* であるとし、h は位数 T の V の自己同型とする。このとき、h-ツイスト V-加群を与えることと、V からある $\mathbb{Z}_T$*-twisted local system* への頂点超代数準同型を与えることは同値である。

この定理を適用するために、次のような写像を定義する。

定義 5. 写像 $f : V_{\mathbb{Z}_2^k} \to A$ を

$$\begin{array}{rcl} f : V_{\mathbb{Z}_2^k} & \to & A \\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \otimes e^{\alpha} & \mapsto & Y_g(u_1^1, z)_{-1} \cdots Y_g(u_{k-1}^{k-1}, z)_{-1} Y_g(u_k^k, z) \end{array}$$

で定義する。このとき、$f(u^i) = Y_g(u^i, z)$ である。

このとき、次が成り立つ。

補題 3. f は頂点超代数の準同型である。

この f により、すべての $v \in V_{\mathbb{Z}_2^k}$ に対して、$Y_g(v,z) = f(v)$ が定義され、上の定理から次が成り立つ。

定理 6. (W, Y^W) が σ^l-ツイスト V-加群のとき、(W, Y_g) は $\sigma_1^{l+k-1}g$-ツイスト $V_{\mathbb{Z}_2^k}$-加群である。ここで、σ_1 は $V_\alpha \otimes e^\alpha$ 上 $(-1)^{\langle \alpha, (1,0,\dots,0) \rangle}$ 倍で作用する $V_{\mathbb{Z}_2^k}$ の自己同型である。さらに、(W, Y^W) が既約であれば、(W, Y_g) も既約である。

最後に SVOA $M = L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に対して、上の定理を適用する。M は、M 自身を既約加群としてもち、$L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ を既約 σ-ツイスト加群として持つ。したがって、次が成り立つ。

定理 7. (M, Y_g) は既約 $\sigma_1^{k-1}g$-ツイスト $M_{\mathbb{Z}_2^k}$-加群になり、$(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}), Y_g)$ は既約 $\sigma_1^k g$-ツイスト $M_{\mathbb{Z}_2^k}$-加群になる。

また、D が g-不変な偶 code のとき、σ_1 と $\tilde{g}$ の $M_D \subset M_{\mathbb{Z}_2^k}$ への制限は、code VOA M_D の自己同型を与える。このとき、$u \in M_D$ に対して $Y_g(u,z)L(\frac{1}{2}, h) \subseteq L(\frac{1}{2}, h), h = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ であるから、Y_g を M_D に制限すれば、次が成り立つ。

定理 8. $(L(\frac{1}{2}, 0), Y_g)$ と $(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), Y_g)$ は既約 $\sigma_1^{k-1}g$-ツイスト M_D-加群になり、$(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}), Y_g)$ は既約 $\sigma_1^k g$-ツイスト M_D-加群になる。

参考文献

[BDM] K.Barron, C.Dong and G.Mason, Twisted sectors for tensor product VOAs associated to permutaion groups, math. QA/9803118.

[B] R.E.Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 3068-3071.

[DGH] C.Dong, R.J.Griess Jr. and G.Hohn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, Comm. Math. Phys. **193** (1998), 407-448.

[DLM] C.Dong, H.Li and G.Mason, Modular invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, Comm. Math. Phys. **214** (2000), 1-56.

[DMZ] C.Dong, G.Mason and Y.Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, Proc. Symp. Pure. Math. American Math. Soc. **56** no.2 (1994), 295-316.

[FLM] I.B.Frenkel, J.Lepowsky and A.Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Applied Math, Vol.134, Academic Press, 1988.

[L] H.Li, Local systems of twisted vertex operators, vertex superalgebras and twisted modules, Contemporary Math. **193** (1996), 203-236.

[M1] M.Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, J. Algebra **181** (1996), 207-222.

[M2] M.Miyamoto, Representations of code vertex operator algebras, J. Algebra **201** (1998), 115-150.

[Z] Y.Zhu, Modular invariance of characters of vertex opretor algebras, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237-302.